

UITWERKING
TOETS ProgrammaCorrectheid
maandag 3 oktober 2005
13.15 – 15.00 uur

■ Opgave 1 (8 punten)

```
{(x = 2 · X + 2 · Y ∨ x = 2 · Y + 1) ∧ y = 2 · Y + X}
IF x mod 2 = 0 THEN
  {(x = 2 · X + 2 · Y ∨ x = 2 · Y + 1) ∧ y = 2 · Y + X ∧ x mod 2 = 0}
  (* logica *)
  {x = 2 · X + 2 · Y ∧ y = 2 · Y + X}
  (* rekenen *)
  {x - y = X ∧ y = 2 · Y + X}
  x := x - y;
  {x = X ∧ y = 2 · Y + X}
ELSE
  {(x = 2 · X + 2 · Y ∨ x = 2 · Y + 1) ∧ y = 2 · Y + X ∧ x mod 2 ≠ 0}
  (* logica *)
  {x = 2 · Y + 1 ∧ y = 2 · Y + X}
  (* rekenen *)
  {y - x + 1 = X ∧ y = 2 · Y + X}
  x := y - x + 1;
  {x = X ∧ y = 2 · Y + X}
END
(* verzamel *)
{x = X ∧ y = 2 · Y + X}
(* rekenen *)
{x = X ∧ (y - x) div 2 = Y}
y := (y - x) div 2;
{x = X ∧ y = Y}
```

■ Opgave 2 (19 punten)

- Introduceer de expressies

$$\begin{aligned} S(t) &= (\sum j : 0 \leq j < t : a[j]) \\ M(k) &= (\mathbf{MAX} \ i : 0 \leq i \leq k : S(i)) \end{aligned}$$

en leid recurrente betrekkingen af voor S en M :

$$\begin{aligned} &S(0) \\ = &\{ \text{definitie } S \} \\ &(\sum j : 0 \leq j < 0 : a[j]) \\ = &\{ \text{leeg domein} \} \\ &0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &S(k+1) \\ = &\{ \text{definitie } S \} \\ &(\sum j : 0 \leq j < k+1 : a[j]) \\ = &\{ \text{afsplitsen } j = k \text{ mits } k \geq 0 \} \\ &(\sum j : 0 \leq j < k : a[j]) + a[k] \\ = &\{ \text{herken } S(k) \} \\ &S(k) + a[k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &M(0) \\ = &\{ \text{definitie } M \} \\ &(\mathbf{MAX} \ i : 0 \leq i \leq 0 : S(i)) \\ = &\{ \text{eenpuntsregel} \} \\ &S(0) \\ = &\{ \text{reeds bewezen} \} \\ &0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &M(k+1) \\ = &\{ \text{definitie } M \} \\ &(\mathbf{MAX} \ i : 0 \leq i \leq k+1 : S(i)) \\ = &\{ \text{afsplitsen } i = k+1, \text{ mits } k+1 \geq 0 \text{ (oftewel } k > 0) \} \\ &(\mathbf{MAX} \ i : 0 \leq i \leq k : S(i)) \mathbf{max} \ S(k+1) \\ = &\{ \text{herken } M(k) \} \\ &M(k) \mathbf{max} \ S(k+1) \end{aligned}$$

De recurrente betrekkingen:

$$\begin{aligned} S(0) &= 0 \\ S(k+1) &= S(k) + a[k] && \text{als } k \geq 0 \\ M(0) &= 0 \\ M(k+1) &= M(k) \mathbf{max} \ S(k+1) && \text{als } k > 0 \end{aligned}$$

- **stap 1.** (finalisatie)

Kies als guard $B : k \neq n$. Er geldt dan $[J \wedge \neg B \Rightarrow Q]$ wegens

$$\begin{aligned}
 & J \wedge \neg B \\
 \equiv & \quad \{ \text{definitie } J \text{ en keuze } B \} \\
 & 0 \leq k \leq n \wedge x = M(k) \wedge y = S(k) \wedge k = n \\
 \Rightarrow & \quad \{ \text{invullen } k = n \text{ en weglaten conjuncten } \} \\
 & x = M(n) \\
 \equiv & \quad \{ \text{definities } M \text{ en } S \text{ uitschrijven } \} \\
 & x = (\text{MAX } i : 0 \leq i \leq m : (\sum j : 0 \leq j < i : a[j])) \\
 \equiv & \quad \{ \text{herken } Q \} \\
 & Q
 \end{aligned}$$

- **stap 2.** (initialisatie)

$$\{ P : n \geq 0 \}$$

(* Rekenen: gebruik afgeleide betrekkingen voor $S(0)$ en $M(0)$ *)

$$\{ 0 \leq 0 \leq n \wedge 0 = M(0) \wedge 0 = S(0) \}$$

$$\mathbf{k} := 0 ;$$

$$\{ 0 \leq k \leq n \wedge 0 = M(k) \wedge 0 = S(k) \}$$

$$\mathbf{x} := 0 ;$$

$$\{ 0 \leq k \leq n \wedge x = M(k) \wedge 0 = S(k) \}$$

$$\mathbf{y} := 0 ;$$

$$\{ J : 0 \leq k \leq n \wedge x = M(k) \wedge y = S(k) \}$$

- **stap 3.** (onderbegrenzing variante functie)

Kies als variante functie $vf = n - k$, dan volgt $[J \wedge B \Rightarrow vf \geq 0]$ wegens

$$\begin{aligned}
 & J \wedge B \\
 \equiv & \quad \{ \text{definitie } J \text{ en keuze } B \} \\
 & 0 \leq k \leq n \wedge x = M(k) \wedge y = S(k) \wedge k \neq n \\
 \Rightarrow & \quad \{ \text{weglaten conjuncten } \} \\
 & k \leq n \\
 \equiv & \quad \{ \text{rekenen } \} \\
 & n - k \geq 0 \\
 \equiv & \quad \{ \text{keuze } vf \} \\
 & vf \geq 0
 \end{aligned}$$

stap 4. (body)

```
{  $J \wedge B \wedge vf = V : 0 \leq k \leq n \wedge x = M(k) \wedge y = S(k) \wedge k \neq n \wedge n - k = V$  }  
  (* rekenen *)  
  {  $0 \leq k + 1 \leq n \wedge x = M(k) \wedge y = S(k) \wedge n - (k + 1) < V$  }  
    (* rekenen:  $0 \leq k + 1 \Rightarrow k \geq 0$ , gebruik betrekking voor  $S(k + 1)$  *)  
    {  $0 \leq k + 1 \leq n \wedge x = M(k) \wedge y + a[k] = S(k + 1) \wedge n - (k + 1) < V$  }  
  y := y + a[k];  
  {  $0 \leq k + 1 \leq n \wedge x = M(k) \wedge y = S(k + 1) \wedge n - (k + 1) < V$  }  
    (* rekenen:  $0 \leq k + 1 \Rightarrow k > 0$ , gebruik betrekking voor  $M(k + 1)$  *)  
    {  $0 \leq k + 1 \leq n \wedge x \text{ max } y = M(k + 1) \wedge y = S(k + 1) \wedge n - (k + 1) < V$  }  
  x := x max y;  
  {  $0 \leq k + 1 \leq n \wedge x = M(k + 1) \wedge y = S(k + 1) \wedge n - (k + 1) < V$  }  
  k := k + 1;  
  {  $J \wedge vf < V : 0 \leq k \leq n \wedge x = M(k) \wedge y = S(k) \wedge n - k < V$  }
```

stap 5. (samenvatting)

CONST

$n \in \text{INTEGER} ; \{n \geq 0\}$

$a \in \text{ARRAY } [0 \dots n] \text{ OF } \text{INTEGER} ;$

VAR

$x, y, k : \text{INTEGER} ;$

$k := 0;$

$x := 0;$

$y := 0;$

{ $J : 0 \leq k \leq n \wedge x = M(k) \wedge y = S(k)$ }

(* $vf = n - k$ *)

WHILE $k \neq n$ **DO**

$y := y + a[k];$

$x := x \text{ max } a[k];$

$k := k + 1;$

END

{ $Q : x = (\text{MAX } i : 0 \leq i \leq n : (\sum j : 0 \leq j < i : a[j]))$ }